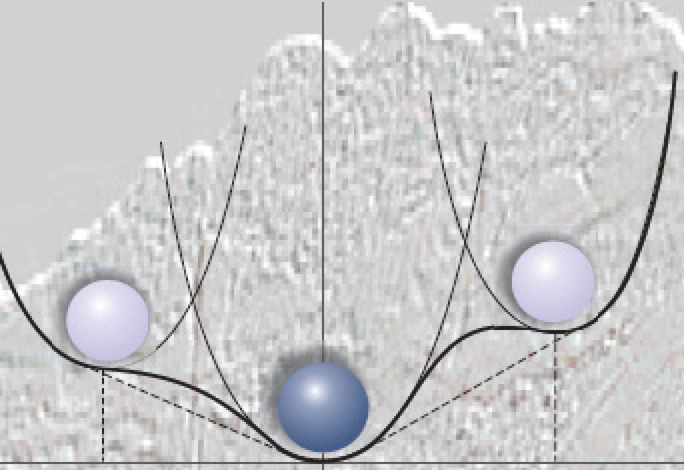

Mieczysław
Kuczma

PODSTAWY MECHANIKI KONSTRUKCJI Z PAMIĘCIĄ KSZTAŁTU

MODELOWANIE I NUMERYKA

Zielona Góra 2010

PODSTAWY MECHANIKI KONSTRUKCJI Z PAMIĘCIĄ KSZTAŁTU

MODELOWANIE I NUMERYKA

Mieczysław Kuczma

Oficyna Wydawnicza Uniwersytetu Zielonogórskiego
Zielona Góra 2010

UNIWERSYTET
ZIELONOGÓRSKI

RECENZJE
prof. dr hab. inż. Bogdan Raniecki
prof. dr hab. inż. Romuald Świtka

SKŁAD I ŁAMANIE
Mieczysław Kuczma

PROJEKT OKŁADKI
Kazimierz Wysocki

ISBN 978-83-7481-411-9

OFICYNA WYDAWNICZA
UNIWERSYTETU ZIELONOGÓRSKIEGO
65-246 Zielona Góra; ul. Podgórna 50, tel./faks (068) 328 78 64
www.ow.uz.zgora.pl; e-mail: oficynawydawnicza@adm.uz.zgora.pl

Mojej ukochanej rodzinie:
żonie Bożenie,
córkom Kasi i Gabrysi,
oraz synowi Pawłowi,
książkę tę dedykuję.

Przedmowa

Postęp technologiczny i komputeryzacja działalności produkcyjnej człowieka stwarzają duże możliwości analizy, projektowania i precyzyjnego wytwarzania nowych materiałów oraz innowacyjnych rozwiązań w praktyce. Dotyczy to także tak tradycyjnej dziedziny inżynierii jaką jest budownictwo, gdzie nowoczesne materiały o wysokiej wytrzymałości pozwalają inżynierom i architektom realizować ich śmiałe koncepcje i wizje, np. w budowie mostów, drapaczy chmur, i nowe sposoby gospodarowania energią. Nieodzowne są tu również współczesne programy komputerowe do analizy statyczno-wytrzymałościowej konstrukcji i pomiarów bieżącego stanu, oraz dostrajania parametrów konstrukcji do aktualnych warunków jej pracy w przypadkach ekstremalnych (przeciążenie, trzęsienie ziemi). Obecnie inżynierowie poszukują rozwiązań systemowych opartych na materiałach wielofunkcyjnych, które oprócz funkcji nośnej byłyby również w stanie pełnić rolę czujników lub siłowników (sensorów, aktuatorów) reagujących adaptacyjnie na zmieniające się czynniki otoczenia.

Opracowanie dotyczy modelowania teoretycznego i symulacji komputerowych pewnej klasy nowoczesnych materiałów – *materiałów z pamięcią kształtu* – oraz konstrukcji z nich wykonanych. Materiały te, np. stopy niklu i tytanu o handlowej nazwie *nitinol*, popularnie nazywane *materiałami inteligentnymi* (ang. smart materials), są obiecującym kandydatem na materiał wielofunkcyjny, bo wykazują unikatowe zachowanie w postaci pseudosprężystych pętli histerezy i efektu pamięci kształtu. Ich zachowanie się jest skutkiem martenzytycznej przemiany fazowej, której mogą ulegać pod wpływem naprężenia, temperatury lub pola elektromagnetycznego. Materiały te mogą się znacznie odkształcać odwracalnie (nawet 8-10%), tzn. po usunięciu obciążenia albo bezpośrednio wracają do stanu wyjściowego lub odkształcenia znikają po ogrzaniu. Dzięki tym właściwościom materiały z pamięcią kształtu znajdują różnorakie zastosowania jako zaawansowane rozwiązania w technice i medycynie, a ostatnio prowadzi się także badania naukowe celem zastosowania ich w budownictwie jako dyssypatorów energii w obiektach narażonych na trzęsienie ziemi i regulatorów sztywności konstrukcji.

Moje zainteresowanie materiałami z pamięcią kształtu jest zasługą Profesorów Erwina Steina, Aleksandra Mielkego i Valeryego Levitasa, z którymi miałem przyjemność współpracować na Uniwersytecie w Hanowerze w latach 1995-1996 w ramach projektu badawczego finansowanego przez Fundację Volkswagen-Stiftung. Do pracy na Uniwersytecie w Hanowerze zostałem delegowany przez Politechnikę Poznańską, wówczas moją macierzystą Uczelnię. Badania nad materiałami z pamięcią kształtu i konstrukcjami z nich wykonanymi kontynuowałem na Uniwersytecie Zielonogórskim w ramach indywidualnego projektu badawczego finansowanego przez Komitet Badań Naukowych w latach 2003-2006. Wszystkim osobom oraz instytucjom, które umożliwiły mi prowadzenie badań nad tym fascynującym problemem badawczym składam serdeczne podziękowania.

Słowa serdecznych podziękowań składam także Profesorowi Bogdanowi Ranieckiemu i Profesorowi Romualdowi Świtce za zainteresowanie niniejszą pracą, wiele cennych uwag i wnikliwe recenzje.

Mieczysław Kuczma

Spis treści

Podstawowe oznaczenia

1D, 2D, 3D	jedno-, dwu-, trój-wymiarowy
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_i b_i$	iloczyn skalarny wektorów $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{R}^d,\ d = 2, 3$
$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$	iloczyn tensorowy wektorów
$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}$	iloczyn skalarny tensorów II-go rzędu $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = A_{ij} B_{ij}$
$\mathbb{C}$	tensor IV-rzędu modułów sprężystości, $\boldsymbol{B} = \mathbb{C}[\boldsymbol{A}]$
$\boldsymbol{D}$	macierz sztywności płyty, lub macierz występująca w LZK
$\sigma,\ \varepsilon,\ E$	naprężenie, odkształcenie, moduł Younga w 1D
$\boldsymbol{\sigma}$	tensor naprężenia, lub macierz kolumnowa z jego składowych
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tensor małych odkształceń
$\boldsymbol{d}_i$	tensor odkształceń fazowych (domena) i-tej fazy
$\boldsymbol{\epsilon}$	macierz kolumnowa ze składowych tensora odkształcenia
c, c_i	udział objętościowy i-ej fazy
c_i^+, c_i^-	części dodatnia i ujemna c_i
F, f	ogólny symbol funkcjonału, lub siły, obciążenia
$\kappa,\ \kappa_m^+,\ \kappa_m^-$	funkcje progowe przemiany fazowej
X, X_m	termodynamiczna siła napędowa przemiany fazowej
$\mathcal{R}^n$	zbiór n kopii liczb rzeczywistych
$W_i(\cdot)$	funkcja energii swobodnej Helmholza i-ej fazy
$\widetilde{W}(\cdot)$	funkcja energii swobodnej Helmholza mieszaniny faz
Δ	operator skończonego przyrostu
∇	operator gradientu
KPF	kryteria przemiany fazowej
LZK	liniowe zadanie komplementarności
MES	metoda elementów skończonych
MPF	martenzytyczna przemiana fazowa
MZPK	materiał z pamięcią kształtu
NW	nierówność wariacyjna

Rozdział 1

Wprowadzenie

Motywacja. Niniejsze opracowanie dotyczy termomechanicznego oraz matematycznego modelowania i numerycznego rozwiązywania zagadnień brzegowych dla nowej klasy materiałów jaką stanowią *materiały z pamięcią kształtu* (MZPK)[1], oraz wykonanych z nich konstrukcji. Materiały te mają unikatowe właściwości, których zwykłe metale lub ich stopy nie wykazują, tj. pseudosprężystość i efekt pamięci kształtu, czyli zdolność doznawania dużych pozornie trwałych odkształceń (rzędu 8%), które znikają po zdjęciu obciążenia, lub są w stanie wywierać znaczne siły przy podgrzaniu. Możliwość pełnienia przez te materiały funkcji sensorów i aktuatorów (czujników i siłowników), które są ich immanentną cechą, oraz ich zdolność dyssypacji energii znajdują stale rosnącą liczbę innowacyjnych, specjalistycznych zastosowań w różnorodnych dziedzinach inżynierii, obejmujących głównie przemysły lotniczy i samochodowy oraz medycynę [32, 149, 203, 31, 138, 97, 112]. Ostatnio częściej prowadzi się badania i stosuje MZPK również w konstrukcjach inżynierskich i budowlanych jako tłumiki drgań i regulatory sztywności konstrukcji [208, 200, 67, 183, 184]. Dzięki ich unikatowym właściwościom, materiały z pamięcią kształtu nazywane są *materiałami inteligentnymi* (ang. *smart materials*) a w szerszej perspektywie traktowane są jako dobry kandydat na materiał wielofunkcyjny [46, 182, 61, 179].

Niezwykłe zachowanie się MZPK jest wynikiem termosprężystej odwracalnej martenzytycznej przemiany fazowej, której te materiały mogą ulegać pod wpływem działającego naprężenia, zmian temperatury lub pola elektromagnetycznego [137, 42, 19, 145]. Zjawisko pamięci kształtu związane z przemianą martenzytyczną odkryto na gruncie metalurgii w latach 30-tych XX wieku. Dopiero jednak w latach 60-tych XX wieku wraz z (przypadkowym) odkryciem niezwykłych właściwości stopu niklu i tytanu, o handlowej nazwie *nitinol*, na-

[1] W j. angielskim używa się nazwy *shape memory alloys* (SMA)

stąpiło praktyczne zainteresowanie się tym zjawiskiem i jego możliwymi zastosowaniami; nazwa handlowa nitinol pochodzi od nazwy pierwiastków (NiTi) i Naval Ordinance Laboratory, tj. nazwy Laboratorium Badawczego Marynarki Wojennej Stanów Zjednoczonych. Przemiany martenzytyczne zachodzą nie tylko w stopach niklu i tytanu, ale także w stopach CuZnAl, CuAlNi, CuZn i innych.

Przemiany martenzytyczne są przemianami bezdyfuzyjnymi, pierwszego rzędu, zachodzącymi poprzez nukleację i wzrost nowej fazy, postępują wskutek procesu jednorodnego odkształcania się siatki krystalograficznej fazy pierwotnej nazywanej konwencjonalnie *austenitem*, bez zmiany jej składu chemicznego. Onacza to, że faza będąca produktem tej przemiany, nazywana konwencjonalnie *martenzytem*, ma taki sam skład chemiczny i stopień uporządkowania (i zdefektowania) sieci jak matryca. Wyróżnia się dwa mechanizmy akomodacji (dostosowania): *poślizg*, który jest odkształceniem trwałym, typowym dla zjawiska plastycznego płynięcia i *bliźniakowanie*, który to mechanizm zapewnia odwracalność zmian kształtu. Tak więc, w przeciwieństwie do plastycznego płynięcia, charakterystycznym rysem termosprężystych przemian martenzytycznych jest ich krystalograficzna odwracalność, która jest wynikiem w istocie sprężytej akomodacji obszarów (domen) martenzytu.

Modele teoretyczne zjawisk fizycznych ujmowane są w postaci zagadnień (poczštkowo-) brzegowych. Aby dany model teoretyczny i generowany przez niego *problem brzegowy* był przydatny w zastosowaniach, problem musi być *dobrze postawiony.* Własność ta oznacza, że dla wszystkich dopuszczanych danych wejściowych istnieje i jest jednoznaczne jego rozwiązanie, które zależy w sposób ciągły od danych wejściowych. Dodajmy, że w przypadku zadań biufurkacyjnych, gdzie w pewnych punktach rozwiązanie ulega rozdwojeniu, oczekujemy także jego ciągłej zależności od danych (np. niezależności od siatki elementów skończonych poza zwykłym błędem aproksymacji). W tym kontekście warto też przywołać ważną zasadę wyrażoną przez Kleibera [77] (str. 11):

”*a) aby uzyskać dostateczną efektywność analizy, należy już na etapie formułowania problemów brzegowo-początkowych myśleć o metodach ich rozwiązania*”.

Cel i zakres opracowania. Martenzytyczne przemiany fazowe i towarzyszące im zjawiska to złożone procesy deformacyjne, które wymagają badań interdyscyplinarnych, m.in. na gruncie metalurgii, krystalografii, mechaniki i matematyki. Każda z tych dziedzin stawia sobie właściwe cele i skalę długości opisu zajawisk, stosując swój język i środki badawcze, co czyni ich wzajemną komunikację dość złożonym procesem. W literaturze proponuje się różne modele MZPK; krótkiego ich przeglądu dokonamy omawiając zjawisko martenzytycznej przemiany fazowej w dalszej części opracowania. Zgodnie z tytułem opracowania naszym celem jest analiza konstrukcji z MZPK, dlatego ograniczamy się do opisu fenomenologicznego na gruncie mechaniki ośrodków ciągłych, kładąc nacisk także na implementację komputerową modelu teoretycznego i opracowanie autorskich programów komputerowych. Rozpatrujemy koherentne przemiany martenzytyczne, tzn. wektor przemieszczenia jest ciągły w całym ciele a jego gradient może być odcinkowo ciągły. Przedmiotem niniejszego opracowania są MZPK w zakresie ich pseudosprężystości, traktowanej jako mechaniczny rodzaj pamięci kształtu, w którym czynnikiem wzbudzającym martenzytyczną przemianę fazową jest naprężenie. Zastosowany model MZPK jest wynikiem pewnego uśrednienia (homogenizacji) i odzwierciedla charakterystyczne cechy tego procesu deformacyjnego z histerezą uwzględniając odkształcenia własne (fazowe) poszczególnych wariantów martenzytu. Wykorzystujemy koncepcję *zmiennych wewnętrznych*, które można interpretować jako udziały objętościowe poszczególnych wariantów martenzytu, a z matematycznego punktu widzenia, możemy mówić o regularyzacji wyjściowego niewypukłego problemu o wielu studniach energetycznych. Do aproksymacji przestrzennej zagadnień brzegowych stosujemy metodę elementów skończonych (MES). Opracowanie w pewnym sensie zachowuje charakter interdyscyplinarny obejmując z jednej strony obszar mechaniki ciał stałych i konstrukcji, a z drugiej matematyki stosowanej i komputerowej.

W tym opracowaniu zagadnienia początkowo-brzegowe dla rozpatrywanych deformacyjnych procesów z histerezą formułujemy w jednolitej postaci ewolucyjnej nierówności wariacyjnej, która obejmuje warunki równowagi statycznej i kryteria zachodzenia przemian fazowych. Przy przyjęciu odpowiednich hipotez, udowadniamy twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań dla tych globalnych sformułowań. Najpierw rozpatrujemy proponowane związki konstytutywne dla 1D i 3D modeli MZPK, które następnie wykorzystujemy w analizie prętów, kratownic, tarcz, belek i płyt wykonanych z MZPK. Proponujemy dwa algorytmy numeryczne, które zaimplementowaliśmy w kilku autorskich programach komputerowych w języku Fortran 95: Belka-SMA, Krata-SMA, Plyta-SMA, Pret-SMA, Tarcza-SMA. Model teoretyczny MZPK, algorytmy i oparte na nich programy komputerowe okazały się efektywne w rozwiązywaniu złożonych, konkretnych zadań brzegowych. Otrzymane rezultaty symulacji numerycznych wg zaproponowanych modeli konstrukcji odzwierciedlają charakterystyczne cechy zachowania się MZPK i są zgodne z naszymi przewidywaniami.

W nauce, technice i ekonomii istnieje całe bogactwo problemów, które aby właściwie opisać należy użyć praw wyrażonych w postaci nie tylko równań lecz także nierówności (inkluzji). Podstawowym zródłem ograniczeń nierównościowych są ogólnie rozumiane prawa równowagi, zarówno fizycznej jak i ekonomicznej natury. Zastosowane tutaj podejście, które wykorzystuje nierówności wariacyjne i warunki komplementarności, jest nie tylko naturalnym i matematycznie jednolitym ujęciem tego typu problemów, ale stanowi jednocześnie bardzo użyteczną podstawę do ich numerycznej analizy. W terminach matematycznych, problemy rozpatrywane w tym opracowaniu są ostatecznie formułowane w postaci słabej jako nierówność wariacyjna (NW) postaci:

Znaleźć takie rozwiązanie $u \in \mathcal{K}$, że

$$\langle\, P(u),\ v-u \,\rangle \geq 0 \qquad \text{dla wszystkich } \ v \in \mathcal{K} \tag{1.1}$$

Tutaj $\mathcal{K}$ jest zbiorem ograniczeń nałożonych na poszukiwane rozwiązanie u; zwykle $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$ jest wypukłym podzbiorem liniowej unormowanej przestrzeni $\mathcal{V}$, na której operator $P : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ jest określony. Symbol $\langle\,\cdot,\,\cdot\,\rangle$ oznacza sprzężenie dualne między przestrzenią $\mathcal{V}$ i jej przestrzenią dualną $\mathcal{V}^*$, tzn. $\langle\,\cdot,\,\cdot\,\rangle : \mathcal{V}^* \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{R}$, przy czym $\mathcal{R}$ jest zbiorem liczb rzeczywistych. W problemach rozpatrywanych w częściach III i IV tego opracowania, $\mathcal{V}$ and $\mathcal{K}$ są iloczynami kartezjańskimi pewnych zbiorów wynikających z charakteru zastosowanych zmiennych niezależnych w analizowanym procesie odkształceniowym. Dodać należy, że z uwagi na zjawisko histerezy i niemonotoniczny charakter procesu, np. wskutek niemonotonicznego obciążania, NW (1.1) rozwiązywana jest przyrostowo w oparciu o regułę monotonicznej ścieżki na każdym przyroście (kroku czasowym).

Procesy martenzytycznej przemiany fazowej, i towarzyszące jej w idealnej pseudosprężystości zajawisko płynięcia, wykazują fenomenologicznie duże podobieństwo do plastycznego płynięcia materiału. Jak już wspomniano wyżej, różne są jednak mechanizmy deformacyjne w mikroskali, w przypadku MZPK proces odkształcania następuje przez reorganizację siatki krystalograficznej z austenitu w martenzyt lub bliźniakowanie wariantów martenzytu, natomiast odkształcanie plastyczne tradycyjnych stopów metali jest wynikiem mechanizmu poślizgowego. Również z obliczeniowego punktu widzenia, oba te procesy można opisać za pomocą tzw. *warunków komplementarności*[2]

$$\Phi \leq 0, \qquad \dot{\lambda} \geq 0, \qquad \Phi \cdot \dot{\lambda} = 0 \tag{1.2}$$

gdzie $\Phi = \Phi(\dot{\lambda}, \cdot)$ jest pewną funkcją graniczną, zależną od zmiennej $\dot{\lambda}$ i jeszcze innych zmiennych. Zależności (1.2) noszą w plastyczności nazwę *warunków obciażania/odciążania*, natomiast w przypadku przemian fazowych mówimy o *kryteriach zachodzenia przemiany.* W przypadku rozpatrywanej tutaj przemiany fazowej z histerezyjnym zachowaniem, użyteczną okazała się

[2]Nazywanych też warunkami Karusha-Kuhna-Tuckera

II zasada termodynamiki, którą stosujemy w postaci nierówności Clausiusa-Duhema. Nierówność ta nakłada ograniczenia na związki konstytutywne i na ruch ośrodka. Ograniczenie na ruch dotyczy kierunku, w którym dany proces fizyczny może występować w naturze, w naszym przypadku chodzi o rozstrzygnięcie, który z wariantów martenzytu i w jakim kierunku może się rozwijać (przemiana wprost i przemiana odwrotna). Oprócz podobieństwa struktury formalnej warunków (1.2), zasadnicza różnica między plastycznym płynięciem a pseudosprężystym (martenzytycznym) płynięciem polega na tym, że w tym drugim przypadku na mnożnik Lagrange'a $\dot{\lambda}$, nakłada się pewne *ograniczenia pudełkowe* (ang. *box constraints*), podczas gdy w plastyczności żąda się tylko jego nieujemności, $\dot{\lambda} \geq 0$. Zauważmy jeszcze, że granica podobszaru konstrukcji, gdzie występuje plastyczne lub pseudosprężyste płynięcie nie jest znana a priori, lecz stanowi dodatkową niewiadomą zadania. Jest to tzw. *swobodny brzeg* (ang. *free boundary*), którego położenie otrzymujemy jako poboczny wynik rozwiązania zadania (1.2) lub odpowiadającej mu NW (1.1).

W opracowaniu wydzielono cztery części. Część I, Podstawy teorii, zawiera podstawowe pojęcia mechaniki ciał odkształcalnych wykorzystywane w dalszych częściach opracowania. Po wprowadzeniu stosowanej notacji dla wielkości polowych mechaniki, przypominamy potrzebne dalej zasady termodynamiki i równanie pracy wirtualnej. Ponadto, dla wygody Czytelnika omawiamy tu wiele pojęć i koncepcji matematycznych związanych z nierównościami wariacyjnymi i zadaniami komplementarności. Pokazujemy jak powstają nierówności wariacyjne i jaki jest ich związek z zadaniami komplementarności. Podajemy wraz z dowodem podstawowe twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania nierówności wariacyjnych, bazujące na twierdzeniu Banacha o odzworowaniu zwężającym. Szkicujemy ogólne właściwości i zasady aproksymacji za pomocą MES. Przedstawiamy wykorzystane w obliczeniach algorytmy rozwiązywania zadań komplementarności.

W cześci II, Konstrukcje sprężyste, omawiamy klasyczne teorie rozpatrywanych typów konstrukcji, przywołując odpowiadające im zagadnienia brzegowe i aproksymację ich rozwiazań MES na bazie sformułowania wariacyjnego. W jednowymiarowych (1D) przypadkach sprężytych prętów i belek pokazujemy, że chociaż z definicji MES jest metodą przybliżoną, błąd aproksymacji można uczynić praktycznie dowolnie małym i nieistotnym z punktu widzenia praktyki inżynierskiej.

Część III, Martenzytyczne przemiany fazowe, prezentuje proponowany model konstytutywny materiału z pamięcią kształtu. Zaczynamy od opisu zależności dla przypadku jednowymiarowego i tylko dwóch faz: austenitu i martenzytu, który następnie uogólniamy na przypadek trzech faz: austenitu i dwóch faz (wariantów) martenzytu, z myślą o ściskanych lub rozciąganych prętach kratownicowych lub takowych włóknach zginanej belki. Potem rozpatrujemy ciało 3D, wyróżniając najpierw przypadek dwóch faz (austenitu i martenzytu), a kończymy na ogólnym przypadku wielu wariantów martenzytu, który opisuje funkcja energii o wielu lokalnych minimach (studniach energetycznych) odpowiadających odkształceniom własnym poszczególnych faz (wariantów). Tutaj też badamy przewidywania modelu i weryfikujemy programy komputerowe na przykładzie pręta i tarczy z MZPK.

Część IV, Konstrukcje z pamięcią kształtu, wieńczy poprzednie części i zawiera propozycje modelu kratownic, belek i płyt z pamięcią kształtu. Rozpatrujemy przypadek ogólny włóknokompozytowych belek i płyt zbrojonych w wybranych warstwach włóknami z MZPK, stosując myślowy podział przekroju poprzecznego na warstwy; w przypadku szczególnym mamy belki i płyty o litym przekroju z MZPK. Załączone przykłady numeryczne stanowią swoistą weryfikację modelu teoretycznego i opracowanych programów komputerowych, oraz ilustrują specyfikę zachowanie się takich konstrukcji z MZPK.

Podstawowe założenia. Przedstawione w opracowaniu rozważania bazują na następujących głównych założeniach:

- Odkształcenia i przemieszczenia ciała są na tyle małe, że można je opisać wg teorii geometrycznie liniowej (wyjątek stanowią kratownice przestrzenne omawiane w podrozdziale 13.3).
- W stanie początkowym materiał jest jednorodny i izotropowy, jego zachowanie w zakresie sprężystym daje się opisać prawem Hooke'a.
- Rozpatruje się procesy quasi-statyczne.
- Rozważane procesy traktuje się jako izotermiczne (wyjątek stanowi 1D model analizowany w podrozdziale 9.4).
- Martenzytyczne przemiany fazowe są koherentne i zachodzą w zakresie pseudosprężystym.

Uwagi o oznaczeniach. Przyjęte w opracowaniu oznaczenia są próbą znalezienia kompromisu między systemami znakowania i tradycyjnych oznaczeń na niektóre wielkości stosowanymi w mechanice i matematyce. Ponadto autor starał się zachować spójność oznaczeń w opracowaniu i w autorskich programach komputerowych, aby uniknąć dodatkowych błędów na etapie ich pisania. Naczelną przyjętą zasadą jest znakowanie wielkości matematycznych kursywą: zwykłą – skalary, wytłuszoną – wektory (małe litery) i macierze (duże litery). Dalsze szczegóły podane są w miejscach definiowania zmiennych, funkcji oraz operatorów.